Int. J. Solids Structures, 1970, Vol. 6, pp. 183 to 193. Pergamon Press. Printed in Great Britain

SUR LE PROBLÈME AUX LIMITES EN VITESSE DES CONTRAINTES DU SOLIDE ÉLASTO-PLASTIQUE

H. D. BUI et K. DANGVAN

Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Paris, France
et Centre des Renardières, Electricité de France, Moret/Loing

Résumé—On formule le problème aux limites en vitesse des contraintes du solide élasto-plastique au moyen d'équations intégrales singulières. Grâce aux travaux de S. G. Mikhlin, on peut appliquer la théorie de Fredholm à ces équations. Lorsque le domaine d'écoulement plastique est connu d'avance, grâce à l'alternative de Fredholm, on peut déduire l'existence de la solution à partir du théorème d'unicité de Melan. Lorsque le domaine d'écoulement plastique n'est pas connu d'avance, on résoud le problème par la méthode variationnelle. Le résultat important est que la méthode est applicable à des solides non bornés.

1. INTRODUCTION

LES problèmes aux limites du solide élasto-plastique peuvent se ramener à des problèmes élastiques correspondants, si on se donne la déformation plastique en chaque point. Ainsi, en s'appuyant sur les principes du minimum en élasticité, Koiter [1] a énoncé les principes variationnels pour les contraintes ou déformations totales actuelles, et cela pour chaque donnée de la déformation plastique.

On peut considérer la déformation plastique (ou la vitesse) comme inconnue du problème. Ceci revient à introduire dans le problème élastique correspondant des forces fictives qui dépendent de la déformation plastique (ou de la vitesse). Avec la loi de comportement plastique, on est amené à résoudre un système intégro-différentiel pour les contraintes ou pour les déformations plastiques (ou leurs vitesse). Cette méthode due à Eshelby [2] est utilisée pour résoudre certains problèmes d'inclusions plastiques. (Voir aussi Lin *et al.* [3]).

La méthode de Eshelby présente plusieurs inconvénients. D'abord les systèmes intégro-différentiels ne sont pas commodes à étudier. Ensuite elle exige la connaissance du domaine du solide qui se trouve être en charge plastique. Ce domaine n'est malheureusement pas connu d'avance pour un milieu homogène.

Nous montrerons dans Section 2 que le système intégro-différentiel peut se transformer en un système d'équations intégrals singulières au sens des valeurs principales de Cauchy. Grâce aux travaux de S. G. Mikhlin [4] il est possible d'étendre la théorie de Fredholm à ces équations singulières. Grâce à l'alternative de Fredholm, l'existence de la solution de ces équations se déduit du théorème d'unicité que Melan a démontré pour certain solide écrouissable [5].

Nous examinerons dans Section 3 le problème qui nous concerne lorsque dans le domaine Ω qui se trouve à la limite de plasticité (avec le critère de Misès et l'écrouissage isotrope, nous avons $s(x) . s(x) = K^2$†) il existe une région en charge plastique

† Nous utilisons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés. Nous utilisons la notation:

$$s(x) . s(x) = s_{ij}(x)s_{ij}(x).$$

$P(\dot{s}(x) . s(x) \geq 0)$ et une région en décharge élastique $D = \{\Omega - P\}(\dot{s}(x) . s(x) < 0)$. Le domaine Ω est connu. Par contre la frontière entre P et D n'est pas connue d'avance. Ce problème sera résolu par la méthode variationnelle. Les méthodes variationnelles classiques, pour les vitesses des contraintes (Hodge–Prager) et pour les vitesses des déformations (Greenberg) portent sur des formes qui sont définies sur le solide V tout entier : Des difficultés se soulèvent lorsque le solide V est infini.

La méthode variationnelle que nous proposons porte sur les vitesses de déformations plastiques donc sur des formes qui sont définies dans la région finie Ω. La méthode est donc applicable au solide infini, en particulier le semi-espace.

2. EQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

Forces fictives dues à la déformation plastique

Soit V le solide élasto–plastique de frontière ∂V et soit P la région en charge plastique de frontière ∂P. Les deux frontières peuvent avoir une partie commune. Soit $\Lambda = (\Lambda_{ij}^{hk})$ le tenseur des modules élastiques de constante de Lamé λ et μ et $M = (M_{ij}^{hk})$ le tenseur inverse de Λ.

La déformation $\dot{\varepsilon}_{ij}$ est décomposée en partie élastique $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ et en partie plastique $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$.

Il est connu que la vitesse $\dot{\varepsilon}_{ij}(x)$ du solide élasto–plastique peut être considérée comme la vitesse de déformation d'un solide purement élastique de même géométrie V soumis à la même traction surfacique $\dot{F}_i(x)$ que le solide élasto–plastique mais avec des forces fictives suivantes (Eshelby [2], Lin [3]) :

$$
\begin{aligned}
\dot{f}_i(x) &= -2\mu\dot{\varepsilon}_{ij,j}^{p}(x) \qquad && x \in P \\
\dot{S}_i(x) &= +2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(x)n_j(x) \qquad && x \in \partial P
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(la virgule devant j indique la dérivation par rapport à x_j et n_j est la normale extérieure à ∂P).

Problème aux limites en vitesses des forces

A un instant donné de l'histoire de déformation du solide nous supposons connues toutes les grandeurs actuelles telles que contraintes $\sigma_{ij}(x)$ (déviateur $s_{ij}(x)$) et déformation. Nous supposons pour le moment que les vitesses des forces $\dot{F}_i(x)$ $x \in \partial V$ sont telles que $P = \Omega$. Il n'y a pas de décharge dans Ω. C'est une hypothèse à vérifier une fois connue la solution du problème.

Soit $\dot{u}_i^0(x)$ la vitesse de déplacement solution du problème élastique quand la traction surfacique est $\dot{F}_i(x)$ $x \in \partial V$. La vitesse de déplacement solution du problème élasto–plastique est reliée aux vitesses plastiques par la formule :

$$
\dot{u}_i(x) = \dot{u}_i^0(x) + \int_P N_i^h(x, y)\dot{f}_h(y)\,\mathrm{d}v_y + \int_{\partial P} N_i^h(x, y)\dot{S}_h(y)\,\mathrm{d}s_y \tag{2}
$$

dans laquelle $N_i^h(x, y)$ est le tenseur d'influence élastique de Neumann du solide V.

Il est connu est la partie singulière $S_i^j(x, y)$ de $N_i^j(x, y)$ est le tenseur d'influence de Kelvin–Somigliana qui a des singularités en $|x-y|^{-1}$:

$$S_i^j(x, y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\{(3-4\nu)\delta_{ij}|x-y|^{-1}+(x_i-y_i)(x_j-y_j)|x-y|^{-3}\} \tag{3}$$

ν est le coefficient de Poisson, $|x-y|$: distance x, y.

Dans ces conditions, nous pouvons dériver [2] par rapport à x_j sous le signe d'intégrale et obtenir après symétrisation des indices i, j la vitesse de déformation. En tenant compte de (1) nous obtenons:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x) = \dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)-2\mu\int_P N_{(i,j)}^h(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk,k}^p(y)\,dv_y+2\mu\int_{\partial P} N_{(i,j)}^h(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk}^p(y)n_k(y)\,ds_y. \tag{4}$$

La parenthèse (i,j) indique la symétrisation des indices. La virgule devant j indique la dérivation par rapport à x_j. Les relations intégro-différentielles (4) sont utilisées par Lin, Uchiyama et Martin [3] pour étudier un certain problème d'inclusion plastique.

Réduction à des équations intégrales singulières

La singularité de $N_{(i,j)}^h(x, y)$ étant en $|x-y|^{-2}$, les dérivées partielles de cette quantité par rapport à y_k ne sont pas sommables. On ne peut pas appliquer le théorème de Stokes à (4) sans certaine précaution.

Posons une notation importante. Soit $A_i^h(u, v)$ une matrice fonction de deux variables $u, v \in R^3$. Posons:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial v_k}A_i^h(u, v) = A_{i,j}^{h,k}(u, v).$$

Les dérivées $N_{i,j}^{h,k}(x, y)$ sont régulières dans $P-C(x,\varepsilon)$ où $C(x,\varepsilon)$ est la sphère $|y-x| < \varepsilon$ centrée en x, de rayon arbitrairement petit. Si nous orientons la normale de la sphère vers son *extérieur*, le théorème de Stokes permet d'écrire (4) sous la forme:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}(x) = \dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)&+2\mu\int_{P-C(x,\varepsilon)} N_{(i,j)}^{h,k}(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk}^p(y)\,dv_y+2\mu\int_{\partial C(x,\varepsilon)} N_{(i,j)}^h\dot{\varepsilon}_{hk}^p(y)\nu_k(y)\,ds_y\\ &-2\mu\int_{C(x,\varepsilon)} N_{(i,j)}^h(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk,k}^p(y)\,dv_y\end{aligned} \tag{5}$$

avec ν_k normale extérieure à ∂C.

Il est facile de calculer les limites des deux dernières intégrales de (5) quand $\varepsilon \to 0$ en supposant bien entendu $\dot{\varepsilon}_{hk}^p(y)$ continument dérivable. Pour ce calcul il suffit de prendre la partie singulière (3) du tenseur d'influence.

Nous trouvons aisément que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\mu\int_{\partial C(x,\varepsilon)} S_{(i,j)}^h(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk}^p(y)\nu_k(y)\,ds_y = \frac{8-10\nu}{15(1-\nu)}\dot{\varepsilon}_{ij}^p(x) \equiv \beta\dot{\varepsilon}_{ij}^p(x),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\mu\int_{C(x,\varepsilon)} S_{(i,j)}^h(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk,k}^p(y)\,dv_y = 0.$$

La limite de la première intégrale de (5) si elle existe, est une intégrale singulière au sens des valeurs principales de Cauchy que nous notons par:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{P - C(x,\varepsilon)} N_{(i,j)}^{h,k}(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk}^{p}(y)\,\mathrm{d}v_y = \int_P^* N_{(i,j)}^{h,k}(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk}^{p}(y)\,\mathrm{d}v_y .$$

Cette intégrale a bien un sens. En effet la condition nécessaire et suffisante de son existence, à savoir:

$$\int_{\partial C(x,1)} S_{(i,j)}^{h,k}(x, y)\,\mathrm{d}s_y = 0 \tag{6}$$

est bien vérifiée.

En résumé, les relations intégro-différentielles (4) *sont transformées en relations intégrales à noyaux singuliers*:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{0}(x) + 2\mu \int_P^* N_{(i,j)}^{(h,k)}(x, y)\dot{\varepsilon}_{hk}^{p}(y)\,\mathrm{d}v_y + \beta\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(x) \qquad (x \in V). \tag{7}$$

La parenthèse (h, k) indique la symétrisation faite sur les indices h, k (symétrie de ε_{hk}^{p}).

Le noyau intégral est *symétrique*.

Cela résulte de la symétrie du tenseur d'influence élastique $N_i^h(x, y) = N_h^i(y, x)$, d'où par dérivations partielles:

$$N_{i,j}^{h,k}(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k} N_i^h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k} N_h^i(y, x) \equiv N_{h,k}^{i,j}(y, x).$$

Dans la référence [5], Nemat-Nasser a utilisé le même démarche qui consiste à remplacer la déformation plastique par les forces fictives, pour se ramener à un probléme élastique. Toutefois cet auteur a omis le terme $\beta\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(x)$ qui provient des singularités du tenseur d'influence.

Nous allons déduire de (7) les équations intégrales du problème aux limites étudié. Nous envisageons pour cela plusieurs lois de comportement possibles.

Loi de Prandtl–Reuss [6]

La vitesse plastique est exprimée en fonction des vitesses des contraintes par:

$$\dot{\varepsilon}_{hk}^{p}(x) = g\{\sigma(x)\} s_{hk}(x) s_{lm}(x) \dot{\sigma}_{lm}(x) \qquad g \geq 0$$

g est positif et fini.

La vitesse de déformation totale s'écrit:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(x) + M_{ij}^{hk}\dot{\sigma}_{hk}(x).\dagger \tag{8}$$

De (7) et (8) et avec la loi de comportement, nous obtenons le système d'équations pour les vitesses des contraintes sous la forme: $(x \in P)$

$$H_{ij}^{lm}(x)\dot{\sigma}_{lm}(x) - \int_P^* K_{ij}^{lm}(x, y)\dot{\sigma}_{lm}(y)\,\mathrm{d}v_y - \dot{\varepsilon}_{ij}^{0}(x) = 0 \tag{9}$$

† $M_{ij}^{hk} = \frac{1+\nu}{2E}(\delta_i^h\delta_j^k + \delta_i^k\delta_j^h) - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta^{hk}.$

avec:

$$H_{ij}^{lm}(x) = (1 - \beta)g(\sigma)s_{ij}(x)s_{lm}(x) + M_{ij}^{lm},$$
$$K_{ij}^{lm}(x, y) = N_{(i,j)}^{(h,k)}(x, y)g(\sigma(y))s_{hk}(y)s_{lm}(y) \neq K_{lm}^{ji}(y, x).$$

C'est un système d'équations intégrales à noyaux singuliers non symétriques. La théorie des équations intégrales singulières a été faite dans toute sa généralité par S. G. Mikhlin [4], qui a montré que sous certaines conditions portant sur $H(x)$ et $K(x, y)$, il est possible d'étendre la théorie classique de Fredholm aux équations singulières.

Or l'unicité de la solution triviale correspondant à $\dot{\varepsilon}_{ij}^0 = 0$ est établie (comme cas particulier correspondant à des vitesses de forces $\dot{F}_i(x)$ nulles au contour du solide) par le théorème de Melan (cf. [1] et [6]). Par conséquent l'*existence* (dans L^2) de la solution $\dot{\sigma}(x)$ pour des vitesses $\dot{F}(x)$ non nulles se trouve démontrée par l'alternative de Fredholm. Naturellement les vitesses $\dot{F}(x)$ doivent satisfaire à la condition de l'équilibre mécanique pour que la solution élastique $\dot{\varepsilon}^0(x)$ existe.

Nous avons donc utilisé le théorème d'unicité de Melan pour démontrer l'existence de la solution. La solution de (9) est solution du problème si la condition de charge $s(x) \,.\, \dot{s}(x) \geq 0$ est vérifiée dans tout $\Omega[= P]$.

Solides élastiques–parfaitement plastiques

Ce cas n'est pas inclus dans le précédent parce que si $g \to \infty$, on a $H_{ij}^{lm} \to \infty$. Ici la vitesse plastique est de la forme:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p(x) = s_{ij}(x)\dot{\lambda}(x), \qquad x \in P \tag{10}$$

où $\dot{\lambda}(x)$ est un scalaire non négatif.

La condition de charge dans P, du solide parfaitement plastique obéissant au critère de Misès, s'écrit:

$$s_{ij}(x)\dot{s}_{ij}(x) \equiv s_{ij}(x)\dot{\sigma}_{ij} = 0 \qquad (x \in P).$$

Dans (7), remplaçons d'abord $\dot{\varepsilon}_{ij}(x)$ par (8), puis $\dot{\varepsilon}_{ij}^p(x)$ par (10). Enfin faisons le produit scalaire de tous les termes obtenus par $s_{ij}(x)$. Avec la condition de charge ci-dessus, nous obtenons finalement l'équation intégrale singulière pour $\dot{\lambda}(x)$:

$$(1-\beta)K^2\dot{\lambda}(x) - 2\mu \int_P^* s_{ij}(x)N_{(i,j)}^{(h,k)}(x, y)s_{hk}(y)\dot{\lambda}(y)\,dv_y - s_{ij}(x)\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x) = 0, \qquad x \in P. \tag{11}$$

On peut noter que le noyau intégral est symétrique:

$$K(x, y) = s_{ij}(x)N_{(i,j)}^{(h,k)}(x, y)s_{hk}(y) = K(y, x).$$

A la différence du cas précédent, on ne peut pas déduire du théorème d'unicité (des vitesses de contraintes) de Melan l'existence de la solution $\dot{\varepsilon}_{ij}^p(x)$ ou $\dot{\lambda}(x)$, parce que la vitesse $\dot{\varepsilon}_{ij}^p(x)$ du solide parfaitement plastique n'est pas nécessairement unique.

Toutefois, en étudiant plus loin le cas général où en plus du domaine en charge P, il existe un domaine de décharge D, nous prouverons que le champ unique $\dot{\sigma}(x)$ existe.

3. MÉTHODE VARIATIONNELLE

Système d'inèquations intégrales

Nous étudions seulement le corps élastique–parfaitement plastique. Nous supposons maintenant que le domaine $\Omega(x \in \Omega,\ s_{ij}(x)s_{ij}(x) = K^2)$ comprend une partie P en charge plastique $(s_{ij}(x)\dot{\sigma}_{ij}(x) = 0)$ et une partie D en décharge élastique:

$$s_{ij}(x)\dot{\sigma}_{ij}(x) < 0 \qquad x \in D. \tag{12}$$

Dans P, nous avons l'équation intégrale (11) définissant la vitesse $\dot{\lambda}(x)$, et pouvant être écrite sous la forme

$$(A\dot{\lambda})(x) - g(x) = 0, \qquad x \in P \tag{13}$$

avec A un opérateur linéaire et g un scalaire connu.

Dans D, nous avons la condition de décharge (12). Or nous pouvons remplacer $\dot{\sigma}_{ij}(x)$ par $\dot{\varepsilon}^e_{ij}(x)$ sans changer le sens de l'inégalité (12). D'après (7):

$$\dot{\varepsilon}^e_{ij}(x) = (\beta - 1)\dot{\varepsilon}^p_{ij}(x) + 2\mu \int_P^* N^{(h,k)}_{(i,j)}(x, y)\dot{\varepsilon}^p_{hk}(y)\,\mathrm{d}v_y + \dot{\varepsilon}^0_{ij}(x). \tag{14}$$

Le premier terme au second membre de (14) est nul dans D. Faisons le produit scalaire de $\dot{\varepsilon}^e_{ij}(x)$ par $-s_{ij}(x)$. En tenant compte de (10) et (12) nous obtenons:

$$-2\mu \int_P^* s_{ij}(x)N^{(h,k)}_{(i,j)}(x, y)s_{hk}(y)\dot{\lambda}(y)\,\mathrm{d}v_y - s_{ij}(x)\dot{\varepsilon}^0_{ij}(x) > 0 \qquad x \in D.$$

En convenant que $\dot{\lambda}(x)$ est identiquement nulle dans D, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme condensée:

$$(A\dot{\lambda})(x) - g(x) = 0, \qquad x \in D \tag{15}$$

A étant le même opérateur que celui de (13) ou de (11).

En résumé, nous avons à résoudre le problème suivant: Chercher la vitesse $\dot{\lambda}(x) \geq 0$ $x \in \Omega$ vérifiant l'équation (13) dans un certain domaine P de Ω, la condition (15) ainsi que la condition $\dot{\lambda}(x) = 0$ dans $D = \Omega - P$.

L'opérateur intégral A est à noyau symétrique. Si cet opérateur est positif, c'est-à-dire que si la forme:

$$\begin{aligned} Q(\dot{\lambda}) = {} & \int_\Omega (1 - \beta)K^2\dot{\lambda}^2(x)\,\mathrm{d}v_x \\ & -2\mu \int_\Omega \dot{\lambda}(x)\,\mathrm{d}v_x \int_P^* s_{ij}(x)N^{(h,k)}_{(i,j)}(x, y)s_{hk}(y)\dot{\lambda}(y)\,\mathrm{d}v_y \end{aligned} \tag{16}$$

est définie positive, on peut envisager la résolution du problème ci-dessus par la méthode variationnelle.

Positivité de A

Posons $\dot{\varepsilon}^p_{ij}(x) = s_{ij}(x)\dot{\lambda}(x)$. D'après (14), nous voyons aisément que la forme $Q(\dot{\lambda})$ s'écrit:

$$Q(\dot{\varepsilon}^p) = \int_\Omega \dot{\varepsilon}^p_{ij}(x)[\dot{\varepsilon}^0_{ij}(x) - \dot{\varepsilon}^e_{ij}(x)]\,\mathrm{d}v_x.$$

En convenant que $\lambda(x)$ est identiquement nulle dans $V-\Omega$, nous pouvons remplacer le domaine d'intégration Ω par V. Multiplions les deux membres par $(1+v)/E$ et remarquons que $\dot{\varepsilon}^p$ est un déviateur pur:

$$\begin{aligned} \frac{1+v}{E}Q(\dot{\varepsilon}^p) &= \int_V M_{ij}^{hk}\dot{\varepsilon}_{hk}^p[\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)-\dot{\varepsilon}_{ij}^e(x)]\,\mathrm{d}v_x \\ &= \int_V \dot{\varepsilon}_{hk}^p[\dot{\sigma}_{hk}^0(x)-\dot{\sigma}_{hk}(x)]\,\mathrm{d}v_x \end{aligned} \tag{17}$$

Remarquons que le champ $\dot{\sigma}_{ij}^0(x)-\dot{\sigma}_{ij}(x)$ est statiquement admissible avec la vitesse de force nulle sur le contour ∂V, et que les champs $\dot{\varepsilon}_{ij}(x)$ et $\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)$, donc leur somme, sont cinématiquement admissibles. Par application du théorème des travaux virtuels:

$$\int_V [\dot{\sigma}_{ij}^0(x)-\dot{\sigma}_{ij}(x)][\dot{\varepsilon}_{ij}(x)+\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)]\,\mathrm{d}v_x = 0. \tag{18}$$

Retranchons (17) de (18), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{1+v}{E}Q(\dot{\varepsilon}^p) &= \int_V [\dot{\sigma}_{ij}(x)\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)-\dot{\varepsilon}_{ij}^e(x)\dot{\sigma}_{ij}^0(x)]\,\mathrm{d}v_x \\ &\quad+\int_V [\dot{\sigma}_{ij}(x)\dot{\varepsilon}_{ij}^e(x)-\dot{\sigma}_{ij}^0(x)\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x)]\,\mathrm{d}v_x. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle d'après la symétrie du tenseur des modules élastiques. La seconde intégrale est *positive*, comme conséquence du principe du minimum en élasticité. En effet le vitesse des forces $\dot{F}_i$ est imposée sur *tout* le contour ∂V. Parmi les vitesses des contraintes admissibles $\dot{\sigma}^*(x)$ la vitesse réelle $\dot{\sigma}^0(x)$ du solide élastique minimise le potentiel $\frac{1}{2}\int\dot{\sigma}^*\,.\,M\,.\,\dot{\sigma}^*\,\mathrm{d}v$. D'où en prenant pour $\dot{\sigma}^*(x)$ le champ $\dot{\sigma}(x)$ du solide élasto–plastique:

$$\int_V \dot{\sigma}\,.\,\dot{\varepsilon}^e\,\mathrm{d}v = \int_V \dot{\sigma}\,.\,M\,.\,\dot{\sigma}\,\mathrm{d}v > \int_V \dot{\sigma}^0\,.\,M\,.\,\dot{\sigma}^0\,\mathrm{d}v = \int_V \dot{\sigma}^0\,.\,\dot{\varepsilon}^0\,\mathrm{d}v.$$

L'inégalité est stricte si $\dot{\sigma}(x) \not\equiv \dot{\sigma}^0(x)$.

Ce qui précède montre que la forme $Q(\dot{\varepsilon}^p)$ est positive. Elle n'est pas strictement positive, car on sait que le champ $\dot{\varepsilon}^p(x)$ n'est pas déterminé de façon unique. Cela signifie qu'il existe des champs $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p(x) = s_{ij}(x)\dot{\boldsymbol{\lambda}}(x)$ non triviaux, solutions de l'équation homogène associée à (13), c'est-à-dire l'équation (13) dans laquelle $g(x) = 0$ $(\varepsilon_{ij}^0(x) = 0)$. Or d'après le théorème de Melan, aux données $\dot{\varepsilon}_{ij}^0(x) = 0$ (ou $\dot{F}_i = 0$) ne peut correspondre que la solution $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}(x)$ nulle. En d'autres termes $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = 0$, $Q(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0$.

Le fait que la forme $Q(\lambda)$ est seulement positive va nous conduire, par la méthode variationnelle, à des solutions $\lambda(x)$ non uniques. Ce n'est pas un inconvénient, car il suffit d'avoir une solution quelconque en $\lambda(x)$ pour connaître le champ des vitesses uniques $\dot{\sigma}_{ij}(x)$.

Méthode variationnelle

Nous appliquons d'abord la méthode d'approximation de Fredholm à l'équation (11). Le domaine Ω est découpé en un réseau régulier de cubes numérotés $\alpha = 1\ldots N$. Pour fixer les idées, supposons que le domaine P correspond aux numéros $\alpha = 1\ldots n$ $(n \leq N)$.

L'intégrale au sens des valeurs principales de (11) est remplacée par la somme finie (où β est *différent* de α):

$$\sum_{\beta\neq\alpha} K(\alpha,\beta)X(\beta) \qquad (X = \lambda),$$

$$\beta = 1\ldots n.$$

Nous avons à résoudre le système d'inéquations algébriques suivant:

$$X(\alpha) > 0 \qquad (\alpha = 1\ldots n),$$

$$X(\alpha) = 0 \qquad (\alpha = n+1,\ldots N),$$

$$\sum_{\beta=1}^{N} A(\alpha,\beta)X(\beta)-g(\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1\ldots n),$$

$$\sum_{\beta=1}^{N} A(\alpha,\beta)X(\beta)-g(\alpha) > 0 \qquad (\alpha = n+1,\ldots N).$$

La symétrie $A(\alpha,\beta) = A(\beta,\alpha)$ et la non négativité de la forme quadratique:

$$Q(X) = \sum_{\alpha,\beta} \chi(\alpha)A(\alpha,\beta)X(\beta)$$

permettent de résoudre le système d'inéquations ci-dessus par la méthode variationnelle classique. La solution (ou les solutions) maximise le potentiel:

$$\phi(X) = \sum_{\alpha} g(\alpha)X(\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta} X(\alpha)A(\alpha,\beta)X(\beta). \tag{17}$$

L'existence d'une solution peut être démontrée de la manière suivante. Puisque la forme $Q(X)$ est non négative· le *maximum* de ϕ existe† dans le domaine d'un espace à N dimensions défini par $X(\alpha) \geq 0$ $\alpha = 1\ldots N$. Le maximum de ϕ peut être réalisé en un point unique $\mathbf{X} = \mathbf{a}$. La solution du problème est alors unique. Ce maximum peut être réalisé dans un ensemble de points ε contenant $\mathbf{a}$. La solution du problème n'est pas unique. Mais $d\phi = 0$ pour toute variation de $d\mathbf{X}$ dans l'ensemble ε.

Montrons que le point $\mathbf{a}$ satisfait à notre système d'inéquations. Pour fixer les idées, supposons que:

$$a(\alpha) > 0 \qquad \alpha = 1\ldots n,$$

$$a(\alpha) = 0 \qquad \alpha = n+1\ldots N.$$

En effet pour toute variation $dX(\alpha) \neq 0$ ($\alpha = 1\ldots n$) à partir du point $\mathbf{X} = \mathbf{a}$, les autres $X(\alpha)$ étant fixés, on a $d\phi = 0$ d'où:

$$g(\alpha)-\sum_{\beta} A(\alpha,\beta)X(\beta) = 0 \qquad (\alpha = 1\ldots n).$$

Pour toute variation positive $dX(\alpha) > 0$ ($\alpha = n+1\ldots N$) à partir de $\mathbf{X} = \mathbf{a}$, donc en dehors de l'ensemble ε, on a $d\phi < 0$ d'où:

$$g(\alpha)-\sum_{\beta} A(\alpha,\beta)X(\alpha) < 0 \qquad (\alpha = n+1,\ldots N).$$

† Sauf si la forme ϕ n'est pas bornée supérieurement, cas qui correspond à la dégénéressence de la forme quadratique $X\,.\,A\,.\,X$ et au fait que les données $g(x)$ ne satisfont pas à la condition d'orthogonalité de Fredholm.

N'importe quelle vitesse $\dot{\lambda}(x) = X(x)$ trouvée dans l'ensemble ε nous fournit la vitesse plastique $\dot{\varepsilon}^p_{ij}(x)$ et, grâce à la formule (14), la vitesse élastique $\dot{\varepsilon}^e_{ij}(x)$ ou la vitesse des contraintes $\dot{\sigma}_{ij}(x)$.

La formulation variationnelle que nous donnons ici est très différente des formulations classiques. Par exemple, dans la formulation de Greenberg pour les vitesses de déformations totales $\dot{\varepsilon}(x)$, on minimise la forme : (cf. [6])

$$\phi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\int_V \dot{\sigma}_{ij}(x)\dot{\varepsilon}_{ij}(x)\,\mathrm{d}v_x - \int_{\partial V} \dot{F}_i(x)\dot{u}_i(x)\,\mathrm{d}s_x$$

où $\dot{\sigma}_{ij}$ est liée à $\dot{\varepsilon}_{ij}$ par la loi de comportement, $\dot{F}_i(x)$ est la vitesse des forces imposées. Les vitesses $\dot{\varepsilon}(x)$ sont cinématiquement admissibles avec la vitesse de déplacement $\dot{u}_i(x)$.

La forme $\phi(\dot{\varepsilon})$ est définie sur le solide V tout entier. Pour cette raison la formulation de Greenberg n'est pas applicable au solide infini. Dans notre cas, la forme $\phi(\dot{\lambda})$ ou $\phi(\dot{\varepsilon}^p)$ donnée par (17) est définie sur le domaine Ω qui est toujours fini. La méthode que nous proposons est donc applicable au solide infini, en particulier au semi-espace dont le tenseur d'influence élastique $N^h_i(x, y)$ est connu (cf. Mindlin [7]).

Remerciements—Les auteurs sont reconnaissants au Professeur J. Mandel pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et les remarques fructueuses qu'il leur a faites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. T. Koiter, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. I. North-Holland (1960).
[2] J. D. Eshelby, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. II. North-Holland (1960).
[3] T. H. Lin, S. Uchiyama et D. Martin, *J. mech. phys. Solids* **9**, 200 (1961).
[4] S. G. Mikhlin, *Singular Integral Equations*, Vol. X AMST (1962).
[5] S. Nemat-Nasser, *Int. J. Solids Structures* **4**, (1968).
[6] J. Mandel, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Gauthiers-Villar (1966).
[7] R. Mindlin, *Proc. 1st midwest. Conf. Solid Mech.* (1956).

ANNEXE

Equations intégrales singulières et conditions de Mikhlin [4]

Mikhlin a étudié les équations intégrales singulières de la forme :

$$AG(x) \equiv a(x)G(x) + \int_P^* S(x, y)G(y)\,\mathrm{d}v_y + \int_P R(x, y)G(y)\,\mathrm{d}v_y = g(x) \tag{19}$$

où $R(x, y)$ est un noyau sommable et $S(x, y)$ un noyau singulier de la forme :

$$\begin{aligned} S(x, y) &= f(x, u)|x-y|^{-3} \\ u_i &= (y_i - x_i)|y-x|^{-1} \\ \int_{|u|=1} f(x, u)\,\mathrm{d}s_u &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

La condition (20) est analogue à (6). La fonction $f(x, u)$ est supposée développable en série de fonctions sphériques (convergente dans L^2).

$$f(x, u) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x, u)$$

$$Y_n(x, u) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{|u'|=1} f(x, u') P_n[\cos(u, u')] \, ds_u,$$

$P_n(z)$ est le polynome de Legendre d'ordre n en z et (u, u') est l'angle entre les vecteurs Ou et Ou'.

A chaque opérateur B, Mikhlin fait correspondre un symbole à valeur complexe F_B de la manière suivante. Le symbole de l'opérateur identité est 1. Le symbole de l'opérateur intégral défini par un noyau sommable est zéro. Le symbole de l'opérateur intégral S défini par le noyau singulier $S(x, y)$ ci-dessus est défini par la somme absolument et uniformément convergente.

$$F_S(x, u) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \pi^{3/2} \Gamma(n/2) Y_n(x, u) / \Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right).\dagger$$

A la somme d'opérateurs correspond la somme de leurs symboles. A leur produit de composition correspond le produit de leurs symboles. Réciproquement, la connaissance du symbole d'un opérateur permet de retrouver l'opérateur intégral, mais à un opérateur intégral régulier près.

L'idée de Mikhlin est de chercher un opérateur B tel que la composition avec l'opérateur A de (19), donne une équation de Fredholm (de symbole unité)

$$BAG(x) = Bg(x)$$

à noyau sommable, équation qui soit équivalente à (19). Nécessairement $F_B = (F_A)^{-1}$ à condition que $F_A \neq 0$. Mikhlin a montré que cette dernière condition est suffisante: Si $F_A(x, u)$, fonction continue de x et u, *n'est jamais nulle*, la théorie de Fredholm s'étend à l'équation singulière (19).

Dans le cas d'un système d'équations singulier de la forme:

$$\sum_j A_{ij} G_j(x) = g_i(x) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

la condition de **Mikhlin** est que le déterminant des symboles F_{Aij} est différent de zéro.

Nous avons pu vérifier que la condition de Mikhlin est satisfaite dans le cas simple du solide élastique–parfaitement plastique obéissant au critère de Misès. Cette condition est que dans le domaine P aucune des contraintes principales du déviateur $s_{ij}(x)$ n'est nulle, c'est-à-dire que le tenseur $s_{ij}(x)$ ne doit pas être plan en un point x de P. Les calculs sont plus compliqués pour les autres lois de comportement, mais sont toujours possibles.

(*Received* 28 *March* 1969)

† $\Gamma(z)$ est la fonction eulérienne.

Abstract—The stress rate boundary values problem of an elasto-plastic body is formulated by a system of singular integral equations. From S. G. Mikhlin's work, the theory of Fredholm's equation is valid for these singular equations. When the volume of plastic flow is known, existence of solution is derived from Melan's uniqueness theorem by means of Fredholm's alternative. When the volume of plastic flow is not known, the problem is solved by variational method. The important feature is that the method is valid for unbounded body.

Абстракт—Излагается задача краевых значений скорости напряжения для упруго-пластического тела при помощи системы сингулярных интегральных уравнений. Из работы С. Г. Михлина вытекает, что теория уравнений фредгольма справедлива для этих сингулярных уравнений. Когда объем пластического течения известен, получаетсяь существование решения из теоремы однозначности способом варианта фредгольма. Когда объем пластического течения неизвестен, задача решается вариационным методом. Важным признаком метода является его применимость для неограниченного тела.